SPIS TREŚCI

RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

ZADANIA TEKSTOWE

FUNKCJE I WYKRESY

GEOMETRIA NA PŁASZCZYŹNIE

LICZBY CAŁKOWITE

Zbiór liczb całkowitych – oznaczamy literą C – tworzą liczby naturalne i liczby do nich przeciwne.

$C = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Zbiór liczb całkowitych możemy podzielić na zbiór **liczb całkowitych dodatnich C_+** oraz zbiór **liczb całkowitych ujemnych C_-**

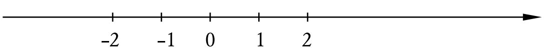
$C_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,...\}$

$C_+ = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, ...\}$

Zero nie jest ani liczbą ujemną, ani liczbą dodatnią.

W zbiorze liczb całkowitych wykonalne są działania dodawania, odejmowania i mnożenia. Oznacza to, że suma, różnica i iloczyn dwóch liczb całkowitych jest liczbą całkowitą.

Liczby całkowite możemy przedstawić na osi liczbowej, pamiętając o tym, że liczby przeciwne leżą po przeciwnych stronach od zera w tej samej odległości.



Gdy ***a*** oznacza pewną liczbę, to liczbą przeciwną do niej jest liczba ***–a***, np. liczbą przeciwną do 2 jest liczba (–2), a liczbą przeciwną do (–5) jest liczba –(–5) = 5.

Aby omówić działania w zbiorze liczb całkowitych, należy przypomnieć pojęcie wartości bezwzględnej.

Wartością bezwzględną liczby *x* – ozn. $|x|$ – nazywamy odległość tej liczby od zera na osi liczbowej.

Definicja symboliczna: $|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

Wartość bezwzględna dowolnej liczby jest **zawsze** liczbą dodatnią.

PRZYKŁADY

- $|3| = 3$
- $|-13| = 13$
- $\left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$
- $|0| = 0$
- $|-1,25| = 1,25$

DZIAŁANIA W ZBIORZE LICZB CAŁKOWITYCH

DODAWANIE

Aby dodać dwie liczby całkowite o tych samych znakach, dodajemy ich wartości bezwzględne, a do wyniku dopisujemy taki znak, jaki mają te liczby.

Aby dodać dwie liczby całkowite o różnych znakach, od większej wartości bezwzględnej liczby odejmujemy mniejszą, a do wyniku dopisujemy taki znak, jaki ma liczba o większej wartości bezwzględnej.

PRZYKŁADY

$-22 + (-5) = -27$	$\|22\| = 22$, $\|-5\| = 5$ do wyniku dopisujemy znak (–), gdyż obie liczby są ujemne.
$-12 + 30 = 18$	$\|-12\| = 12$, $\|30\| = 30$ zatem $30 - 12 = 18$, w wyniku otrzymujemy liczbę dodatnią, gdyż $30 < 12$.
$-56 + 22 = -34$	$\|-56\| = 56$, $\|22\| = 22$ zatem $56 - 22 = 34$, do wyniku dopisujemy znak (–), gdyż $56 > 22$
$-12 + (-32) + 25 + (-18) =$ $= -12 + (-32) + (-18) + 25 =$ $= -62 + 25 = -37$	Korzystamy z przemienności dodawania i dodajemy najpierw liczby ujemne. $\|-62\| = 62$, $\|25\| = 25$ zatem $62 - 25 = 37$ do wyniku dopisujemy znak (–), gdyż $62 > 25$.

ODEJMOWANIE

Przy odejmowaniu liczb całkowitych pamiętaj, aby zamienić je na dodawanie liczby przeciwnej, a następnie postępuj jak w dodawaniu.

PRZYKŁADY

a) $-22 - (-5) =$ $= (-22) + 5 = -17$	Liczbą przeciwną do (–5) jest 5. $\|-22\| = 22$, $\|5\| = 5$, do wyniku dopisujemy znak (–), gdyż $22 > 5$.
b) $-12 - 30 =$ $= (-12) + (-30) = -42$	Liczbą przeciwną do 30 jest (-30). $\|-12\| = 12$, $\|-30\| = 30$ zatem $30 + 12 = 42$, do wyniku dopisujemy znak (–), gdyż obie liczby są ujemne.
c) $-16 + 14 - 5 =$ $= -16 + 14 + (-5) =$ $= -21 + 14 =$ $= -7$	Zamieniamy odejmowanie na dodawanie liczby przeciwnej. Dodajemy liczby ujemne, pamiętając o zasadzie podanej wcześniej. Dodajemy liczby o przeciwnych znakach, czyli $21 - 14 = 7$ i do wyniku dodajemy znak (–), gdyż większą wartość bezwzględną ma liczba ujemna.

MNOŻENIE

Jeżeli mnożymy **dwie liczby całkowite o jednakowych znakach,** to wynik jest **dodatni.** Jeżeli mnożymy **dwie liczby całkowite o różnych znakach,** to wynik jest **ujemny.**
Jeżeli w iloczynie występuje parzysta liczba znaków (–), to wynik jest dodatni, jeżeli liczba znaków (–) jest nieparzysta, to wynik jest ujemny.

PRZYKŁADY

a) $-22 \cdot (-5) =$ $= 110$	Mnożymy dwie liczby o jednakowych znakach, zatem wynik dodatni.
b) $-12 \cdot 6 =$ $= -72$	Mnożymy dwie liczby o różnych znakach, więc do wyniku dopisujemy znak (–).

SPRAWDZENIE:

$L = -4 \cdot (3 \cdot 4 - 2)^2 = -4 \cdot (12 - 2)^2 =$

$= -4 \cdot 10^2 = -4 \cdot 100 = -400$

$P = (12 - 6 \cdot 4) \cdot (12 + 6 \cdot 4) + 8 \cdot 4 =$

$= (12 - 24) \cdot (12 + 24) + 32 = -12 \cdot 36 + 32 =$

$= -432 + 32 = -400$

$L = P$

Aby sprawdzić, czy liczba 4 spełnia równanie, podstawiamy ją w miejsce niewiadomej do wyjściowego równania.

b) $\mathbf{(2x + 1)^2 + (5 - x)^2 = 5(x - 3)^2 + 5}$

ROZWIĄZANIE:

Korzystamy z wzorów skróconego mnożenia, następnie opuszczamy nawiasy:

$(4x^2 + 4x + 1) + (25 - 10x + x^2) = 5(x^2 - 6x + 9) + 5$

$4x^2 + 4x + 1 + 25 - 10x + x^2 = 5x^2 - 30x + 45 + 5$

Redukujemy wyrazy podobne:

$5x^2 - 6x + 26 = 5x^2 - 30x + 50 \quad / - 5x^2$

Przenosimy niewiadome na lewą, a wiadome (liczby) na prawą stronę i redukujemy wyrazy podobne.

$-6x + 26 = -30x + 50$

$24x = 24 \quad / : 24$

$x = 1$

SPRAWDZENIE:

Aby sprawdzić, czy liczba 1 spełnia równanie, podstawiamy ją w miejsce niewiadomej do wyjściowego równania.

$L = (2 \cdot 1 + 1)^2 + (5 - 1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$P = 5 \cdot (1 - 3)^2 + 5 = 5 \cdot (-2)^2 + 5 = 5 \cdot 4 + 5 = 20 + 5 = 25$

$L = P$

NIERÓWNOŚCI LINIOWE Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Nierównością nazywamy dwa wyrażenia połączone znakiem $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, w których występuje jedna lub więcej niewiadomych, np.:

Nierówność z jedną niewiadomą: $3x < x + 2$; $\quad -5x^2 \geq x - 2x^2$

Nierówność z dwiema niewiadomymi: $5x > 2y - 1{,}4$; $\quad 3x - y^2 + 2 \leq 0$

Jeżeli w nierówności występuje znak $<$, $>$, to mówimy o **nierówności ostrej,** jeżeli występuje znak $\leq$, $\geq$, to mówimy o **nierówności nieostrej**.

Nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

Nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą lub **nierównością liniową z jedną niewiadomą** nazywamy nierówność, w której występuje tylko jedna niewiadoma i jest ona w pierwszej potędze, np.:

$3x > x + 7$; $\quad 9x - 72 \leq 8(x + 13)$; $\quad -5(2x - 1) \geq x - 4(x - 3)$

Rozwiązaniem nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą jest **każda liczba,** która spełnia tę nierówność (czyli po podstawieniu w miejsce niewiadomej daje nierówność prawdziwą).

PRZYKŁADY

Sprawdź, która z podanych liczb 3, –2, –4, $\frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem nierówności $9x - (4x + 9) \geq -19$

dla $x = 3$

$$
\begin{aligned}
9 \cdot 3 - (4 \cdot 3 + 9) &\geq -19 \\
27 - (12 + 9) &\geq -19 \\
27 - 21 &\geq -19 \\
6 &\geq -19
\end{aligned}
$$

Podstawiamy w miejsce niewiadomej liczbę 3 i otrzymujemy następującą nierówność:

Zatem liczba 3 jest rozwiązaniem tej nierówności.

dla $x = -2$

$$
\begin{aligned}
9 \cdot (-2) - (4 \cdot (-2) + 9) &\geq -19 \\
-18 - (-8 + 9) &\geq -19 \\
-18 - 1 &\geq -19 \\
-19 &\geq -19
\end{aligned}
$$

Podstawiamy w miejsce niewiadomej liczbę –2 i otrzymujemy następującą nierówność:

Zatem liczba (–2) jest rozwiązaniem tej nierówności.

dla $x = -4$

$$
\begin{aligned}
9 \cdot (-4) - (4 \cdot (-4) + 9) &\geq -19 \\
-36 - (-16 + 9) &\geq -19 \\
-36 - (-7) &\geq -19 \\
-36 + 7 &\geq -19 \\
-29 &\geq -19
\end{aligned}
$$

Podstawiamy w miejsce niewiadomej liczbę –4 i otrzymujemy następującą nierówność:

Zatem liczba (–4) nie jest rozwiązaniem tej nierówności.

dla $x = \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
9 \cdot \frac{1}{2} - \left(4 \cdot \frac{1}{2} + 9\right) &\geq -19 \\
4,5 - (2 + 9) &\geq -19 \\
4,5 - 11 &\geq -19 \\
-6,5 &\geq -19
\end{aligned}
$$

Podstawiamy w miejsce niewiadomej liczbę 0,5 i otrzymujemy następującą nierówność:

Zatem liczba 0,5 jest rozwiązaniem tej nierówności.

Nierówności mające ten sam zbiór rozwiązań nazywamy **nierównościami równoważnymi,** np.:
$x > 1$; $4x - 4 > 0$; $2(3x + 1) > -2(x - 5)$; $-2x + 3 < 1$

Aby **rozwiązać nierówność,** przekształcamy ją w coraz prostsze nierówności równoważne. W tym celu stosujemy następujące twierdzenia:

I. Jeśli do obu stron nierówności dodamy lub odejmiemy to samo wyrażenie – to otrzymamy nierówność równoważną danej.

II. Jeśli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę dodatnią – to otrzymamy nierówność równoważną danej.

III. Jeśli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną i zmienimy znak nierówności na przeciwny – to otrzymamy nierówność równoważną danej.

IV. Jeśli jedną lub obydwie strony nierówności przekształcimy, stosując znane prawa działań (np. redukcja wyrazów podobnych, usunięcie nawiasów) – to otrzymamy nierówność równoważną danej.

PRZYKŁADY

Jeśli do obu stron nierówności $2x + 11 > 5$ dodamy liczbę 3, to otrzymamy nierówność równoważną postaci $2x + 14 > 8$.

$\alpha + \delta + \angle y = 180^\circ$

$70^\circ + \delta + 60^\circ = 180^\circ$

$\delta + 130^\circ = 180^\circ \quad /-130^\circ$

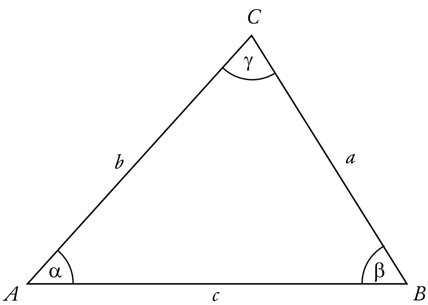
$\delta = 50^\circ$

Kąty α, δ i y to kąty wewnętrzne trójkąta, zatem suma ich miar wynosi 180°.

Szukane miary kątów to: $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, $\delta = 50^\circ$.

TRÓJKĄTY I ICH WŁASNOŚCI

Trójkątem nazywamy wielokąt o trzech bokach, trzech kątach i trzech wierzchołkach.

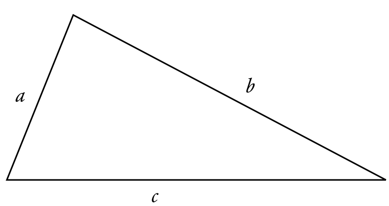
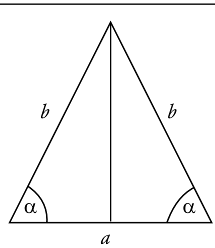


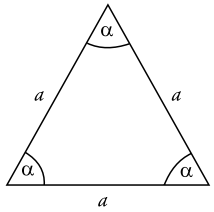
Punkty A, B, C – wierzchołki trójkąta.
Odcinki AB, BC, AC (a, b, c) – boki trójkąta.
Kąty α, β, γ – kąty wewnętrzne trójkąta.

Aby obliczyć **obwód trójkąta (L),** należy zsumować długości boków tego trójkąta.
$L = a + b + c$
Długość każdego boku jest liczbą dodatnią.

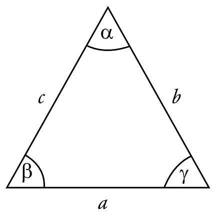
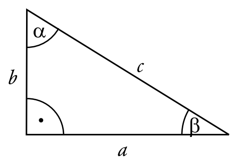
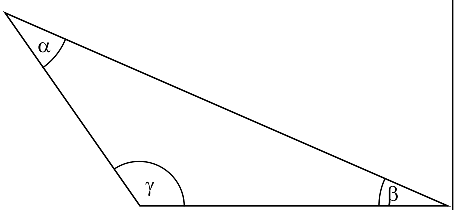
Podział trójkątów

1) ZE WZGLĘDU NA BOKI

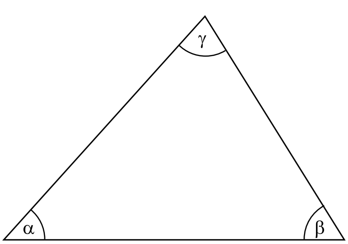
różnoboczny		$a \neq b \neq c$
równoramienny		b – ramię trójkąta a – podstawa trójkąta Kąty przy podstawie mają równe miary.

równoboczny		$\alpha = 60^\circ$

2) ZE WZGLĘDU NA KĄTY

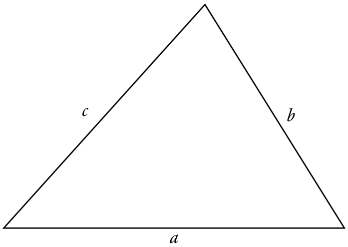
ostrokątny		$\alpha < 90^\circ$ $\beta < 90^\circ$ $\gamma < 90^\circ$
prostokątny		$\alpha + \beta = 90^\circ$ a, b – przyprostokątne c – przeciwprostokątna
rozwartokątny		$\alpha < 90^\circ$ $\beta < 90^\circ$ $90^\circ < \gamma < 180^\circ$

Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180°.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

W trójkącie suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od długości boku trzeciego.



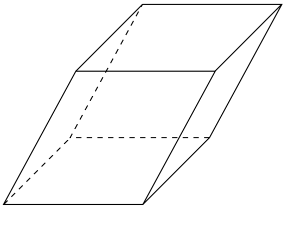
nierówność trójkąta

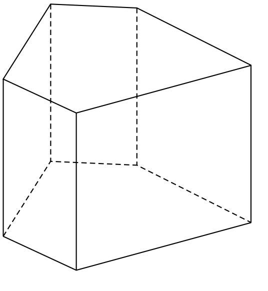
$$a + b > c$$
$$b + c > a$$
$$a + c > b$$

GEOMETRIA W PRZESTRZENI

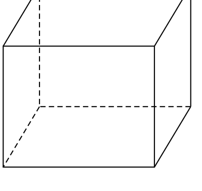
GRANIASTOSŁUPY

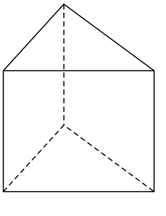
Graniastosłupem nazywamy wielościan, którego dwie ściany zwane podstawami są wielokątami przystającymi leżącymi w dwóch różnych równoległych płaszczyznach, a ściany boczne są równoległobokami.



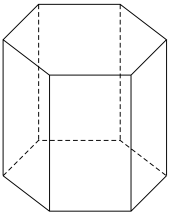


Graniastosłupem prostym nazywamy taki graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do obu podstaw.





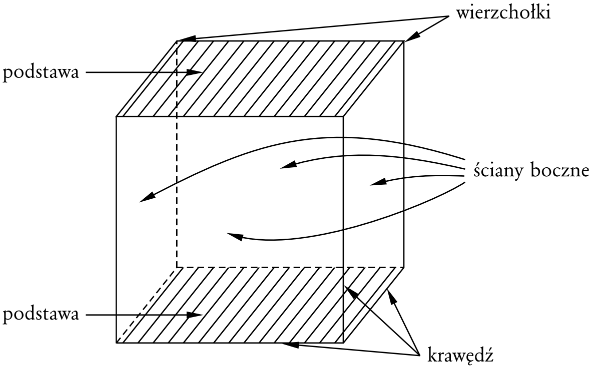
Graniastosłupem prawidłowym nazywamy graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi.



Szkicując bryłę, pamiętaj, aby odcinki równoległe w rzeczywistości były równoległe na rysunku, a odcinki równej długości w rzeczywistości miały równą długość na rysunku. Pamiętaj, aby odcinki ważne nie pokrywały się na twoich rysunkach.

W nazwie graniastosłupa zawarta jest informacja o tym, jaki wielokąt występuje w podstawie, np.:
- **graniastosłup trójkątny** – w podstawie jest trójkąt
- **graniastosłup czworokątny** – w podstawie jest czworokąt
- **graniastosłup sześciokątny** – w podstawie jest sześciokąt

W graniastosłupie wyróżniamy **krawędzie, wierzchołki, ściany boczne** i dwie **podstawy.**



Jeżeli graniastosłup ma w podstawie wielokąt o n-kątach, to:
- liczba ścian wynosi: $n + 2$
- liczba wierzchołków wynosi: $2n$
- liczba krawędzi wynosi: $3n$

PRZYKŁADY

Graniastosłup pięciokątny		**Graniastosłup stukątny**	
w podstawie:	**pięciokąt**	w podstawie:	**wielokąt o stu kątach**
liczba ścian:	**7**	liczba ścian:	**102**
liczba wierzchołków:	**10**	liczba wierzchołków:	**200**
liczba krawędzi:	**15**	liczba krawędzi:	**300**

Wysokością graniastosłupa nazywamy odcinek prostopadły do obu podstaw, którego końce należą do płaszczyzny podstaw.
W graniastosłupie prostym **wysokością** jest **krawędź boczna** tego graniastosłupa.
Przekątną graniastosłupa nazywamy każdy odcinek, który łączy wierzchołki obu podstaw nienależące do tej samej ściany graniastosłupa.

WYBRANE ZADANIA Z EGZAMINÓW GIMNAZJALNYCH

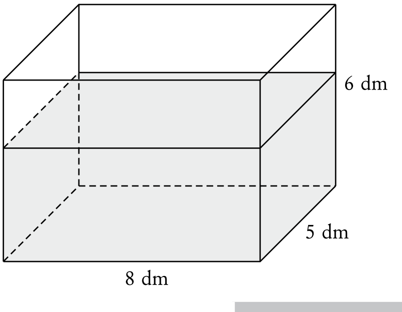
ZADANIE 1 (MAJ 2002)

Akwarium, w którym Marek hoduje rybki, ma wymiary 5 dm, 8 dm, 6 dm. Marek wlewa do niego wodę przepływającą przez kran z szybkością 8 dm^3 na minutę. Do jakiej wysokości woda w akwarium będzie sięgać po 10 minutach? Zapisz obliczenia.

DANE:
a = 5 dm
b = 8 dm
c = 6 dm
woda przepływa z szybkością: 8 dm^3 / 1 min

SZUKANE:
H – wysokość, do jakiej będzie sięgać woda po 10 minutach

ROZWIĄZANIE:



1 min —— 8 dm^3
10 min —— 80 dm^3

Po 10 minutach w akwarium będzie 80 dm^3 wody.

Obliczamy, jaka musi być wysokość tego akwarium o podstawie 8 dm × 5 dm, aby jego objętość wyniosła 80 dm^3:

Obliczamy, ile dm^3 wody będzie w akwarium po 10 minutach.

Objętość prostopadłościanu: $V = a \cdot b \cdot H$
Wprowadzamy oznaczenia:
V_w – objętość akwarium w części wypełnionej wodą
H_w – wysokość wody po 10 minutach
$V_w = 80\ dm^3$

$V_w = a \cdot b \cdot H_w$

$80 = 5 \cdot 8 \cdot H_w$

$80 = 40 \cdot H_w \quad / : 40$

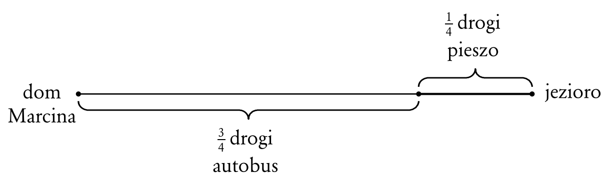
$H_w = 2[\mathrm{dm}]$

ODPOWIEDŹ: Po 10 minutach woda w akwarium będzie sięgać do wysokości 2 dm.

ZADANIE 2 (MAJ 2002)

Marcin przebywa autobusem $\frac{3}{4}$ drogi do jeziora, a pozostałą część piechotą. Oblicz odległość między domem Marcina a jeziorem, jeżeli trasa, którą przebywa pieszo, jest o 8 km krótsza, niż trasa, którą przebywa autobusem. Zapisz obliczenia.

ROZWIĄZANIE:



ANALIZA:

x – odległość w kilometrach pomiędzy domem Marcina a jeziorem

$\frac{3}{4}x$ – część drogi przebyta autobusem

$\frac{1}{4}x$ – część drogi przebyta pieszo

8 km – różnica pomiędzy odległością przebytą autobusem a odległością przebytą pieszo

Układamy równanie:

$\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x = 8 \quad / \cdot 4$

$4x - x = 32$

$2x = 32$

Odległość między domem Marcina a jeziorem:

$x = 16[\mathrm{km}]$

SPRAWDZENIE:

Część drogi przebyta autobusem:

$\frac{3}{4} \cdot 16 = 3 \cdot 4 = 12[\mathrm{km}]$

Część drogi przebyta pieszo:

$\frac{1}{4} \cdot 16 = 1 \cdot 4 = 4[\mathrm{km}]$

Sprawdzamy, czy droga przebyta autobusem jest o 8 km dłuższa od drogi przebytej pieszo:

12 km – 4 km = 8 km

ODPOWIEDŹ: Odległość między domem Marcina a jeziorem wynosi 16 km.

ZADANIE 3 (MAJ 2002)

Przed przystąpieniem do budowy latawca Janek rysuje jego model. Model ten przedstawiono na rysunku w skali 1: 10. Oblicz pole powierzchni latawca zbudowanego przez Janka, wiedząc, że długości odcinków AC i BD równe są odpowiednio 4 cm i 2 cm, oraz $AC \perp BD$ i S – środek BD. Zapisz obliczenia.

DANE:

$|AC| = 4\,\text{cm}$

$|BD| = 2\,\text{cm}$

$AC \perp BD$

S – środek BD

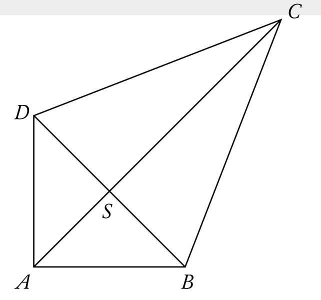
Skala – 1 : 10

SZUKANE:

P – pole deltoidu (latawca)

$P = \frac{1}{2} p \cdot q$

p, q – przekątne deltoidu



ROZWIĄZANIE:

Wymiary w rzeczywistości:

$|AC| = 4 \cdot 10 = 40\,\text{cm}$

$|BD| = 2 \cdot 10 = 20\,\text{cm}$

Wyznaczamy rzeczywiste wymiary latawca.
Skala 1 : 10 informuje nas o tym, że **1 cm na mapie odpowiada 10 cm w rzeczywistości.**

Obliczamy pole powierzchni latawca:

$P = \frac{1}{2} p \cdot q$

$P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD|$

$P = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 20 = 20 \cdot 20$

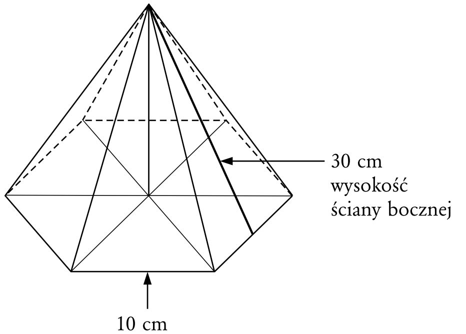
$P = 400\,[\text{cm}^2]$

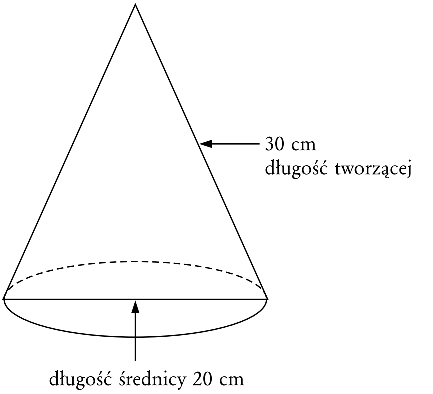
Zauważ, że odcinki AC i BD są przekątnymi deltoidu (latawca), gdyż przecinają się pod kątem prostym $AC \perp BD$.

ODPOWIEDŹ: Pole powierzchni latawca wykonanego przez Janka wynosi 400 cm^2.

ZADANIE 4 (MAJ 2002)

Na zabawę karnawałową Beata wykonała kartonowe czapeczki w kształcie brył narysowanych poniżej:





Ile papieru zużyła na każdą z czapeczek? Na którą czapeczkę zużyła więcej papieru? Zapisz obliczenia.